# Grundlagen


## 1 Rechengrundlagen

### 1.1 Mathematische Grundlagen

#### 1.1.1 Rechnen mit Zehnerpotenzen

Rechnen mit Zehnerpotenzen kommt ziemlich häufig vor.

Bei **Multiplikationen** werden die Exponenten **addiert:**

$$4 \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^9 \quad \rightarrow \quad 6 + 3 = 9$$

Bei **Divisionen** werden die Exponenten **subtrahiert:**

$$4 \cdot 10^6 / 10^3 = 4 \cdot 10^3 \quad \rightarrow \quad 6 - 3 = 3$$

Bei **Additionen** und **Subtraktionen** ändert sich der Exponent nicht. Sie können nur dann durchgeführt werden, wenn es sich um dieselben Exponenten handelt.

$$3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^3$$

oder

$$\begin{aligned} 3{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}5 \cdot 10^4 &= 3{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}5 \cdot 10 \cdot 10^3 \\ &= 3{,}2 \cdot 10^3 + 45 \cdot 10^3 = 48{,}2 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

#### 1.1.2 Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Du musst dafür nur wissen, dass der Logarithmus von 10 zur Basis 10 gleich 1 ist, der von 100 gleich 2 usw.:

$\log_{10} 10 = 1$

Es hat sich eingebürgert, den Logarithmus von 10 zur Basis 10 einfach als log10 zu schreiben, ohne die Basis anzugeben (auch auf dem Taschenrechner und beim IMPP): log10 = 1, log100 = 2, log1000 = 3 usw. Wir werden das an den entsprechenden Stellen ebenfalls so halten.

Auch in der Chemie, Biochemie oder Physiologie muss man manchmal mit Logarithmen rechnen. Wichtige Regeln dazu sind:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log(a/b) = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

log steht für den dekadischen Logarithmus, d. h. den Logarithmus zur Basis 10. Die Regeln gelten aber auch für den natürlichen Logarithmus zur Basis e (e ist die Eulersche Zahl = 2,71 828...), geschrieben ln.

#### 1.1.3 Trigonometrische Funktionen

In der folgenden Aufgabe wird erklärt, was die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus bedeuten. Sie bezieht sich auf die Seitenlängen, wie sie in der Abbildung gezeigt sind.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad \alpha = 36{,}87°$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \quad \rightarrow \quad \alpha = 36{,}87°$$

Für Sinus und Cosinus gibt es Tabellen (bzw. Taschenrechner), aus denen man den Zahlenwert für einen bestimmten Winkel ablesen kann (denn normalerweise kennt man die Länge der verschiedenen Seiten des zugehörigen Dreiecks nicht, sondern nur den Winkel). In Prüfungen werden die Werte angegeben.

Für den Tangens gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \rightarrow \quad \alpha = 36{,}87°$$

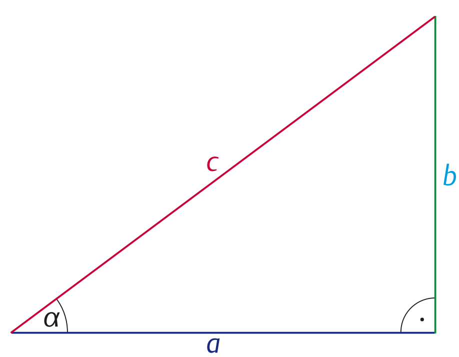


**Abb. 1.1 Winkel und Seiten im rechtwinkligen Dreieck.** $a$ = Ankathete (Länge = 4), $b$ = Gegenkathete (Länge = 3), $c$ = Hypotenuse (Länge = 5). [Quelle: Zabel, Kurzlehrbuch Physik, Thieme, 2016]

#### 1.1.4 Dreisatzrechnung

Manche der IMPP-Aufgaben, die auf den ersten Blick einen komplizierten Lösungsweg verlangen, lassen sich auch durch „gesunden Menschenverstand“ oder auch durch „Hingucken“ lösen. Oft müssen nur Verhältnisse ausgerechnet werden. Dies lässt sich ganz einfach mit einem Dreisatz erreichen:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{x}$$

Man kann die Gleichung auch so schreiben („Über-Kreuz-Multiplikation“):

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{b_1}$$

Auflösen nach *x* ergibt:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot b_1 = x$$

**Lerntipp** !

Das IMPP stellt auch manchmal Fragen, für deren Lösung man einfach nur den gesunden Menschenverstand braucht. Man braucht dazu in der Regel nur die 4 Grundrechenarten.
Bei komplizierteren Rechnungen werden in der Regel alle Angaben, die du zum Lösen der Aufgaben benötigst, zur Verfügung gestellt (jedenfalls in der Physik).

**IMPP-Fakten**

!!!! Die Regeln zum Rechnen mit Zehnerpotenzen solltest du kennen.

! Für den Tangens im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

!!!! Verhältnisse lassen sich am Besten mit einem Dreisatz berechnen:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{x}$$

! Lass dich bei reinen Rechenaufgaben nicht durch die „Geschichte“ der Aufgabe irreführen.

## 1.2 Rechenbeispiele

### 1.2.1 Rechnen mit Zehnerpotenzen

#### Rechenbeispiel 1

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt annähernd $3 \cdot 10^8$ m/s. Wie viele Stundenkilometer sind das?

**Lösung:** Dazu muss man die Meter in Kilometer umrechnen und die Sekunden in Stunden: Am besten vor die umzurechnenden Einheiten jeweils eine „1“ denken, dann:

$$1\ \text{m} = 10^{-3}\ \text{km}$$

$$1\ \text{Stunde} = 60 \cdot 60\ \text{Sekunden} = 3600\ \text{Sekunden}$$

$$1\ \text{Sekunde} = \frac{1}{3600}\ \text{Stunden} = \frac{1}{3{,}6 \cdot 10^3}\ \text{Stunden}$$

Also:

$$3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{10^{-3}\ \text{km}}{\frac{1}{3{,}6 \cdot 10^3}\ \text{h}}$$

$$= 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3}\ \text{km} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3\ \text{h}^{-1} = 3 \cdot 10^8 \cdot 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$= 10{,}8 \cdot 10^8\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}08 \cdot 10^9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

#### Rechenbeispiel 2

Wasser hat eine Dichte von 1 kg/l. Wie viel g/cm³ entspricht dies?

**Lösung:**
1 kg = 1000 g und 1 l = 10 cm · 10 cm · 10 cm = 1000 cm³
Also: 1 kg/l = 1000 g / 1000 cm³ = 1 g/cm³

#### Rechenbeispiel 3

In einer radioaktiven Probe befinden sich $10^{14}$ zerfallsfähige Atome. Beim Zerfall entstehen stabile Nuklide. Die Probe hat eine Aktivität von etwa 12 000 Bq (1 Bq = 1 Zerfall/s).

Wie viele zerfallsfähige Atome sind nach 10 Stunden noch vorhanden?

**Lösung:** Innerhalb von 10 Stunden vergehen 10 · 60 · 60 Sekunden = 36 000 Sekunden. Damit zerfallen in 10 Stunden 12 000 Kerne · 36 000 = 432 000 000 Kerne ≈ $4{,}32 \cdot 10^8$ Kerne (bei konstanter Aktivität; genau genommen nimmt die Aktivität entsprechend der Anzahl zerfallener Kerne ständig ab. Das lassen wir hier aber mal außen vor). In der Probe waren ursprünglich $10^{14}$ Kerne vorhanden. Jetzt sind es noch

$10^{14} - 4{,}32 \cdot 10^8 = 1 \cdot 10^{14} - 0{,}00\,000\,432 \cdot 10^{14} = 0{,}99\,999\,568 \cdot 10^{14}$

### 1.2.2 Trigonometrische Funktionen

Der Bizeps-Muskel am Oberarm hat zwei Köpfe, diese entspringen an zwei verschiedenen Stellen, greifen jedoch an der gleichen Stelle am Unterarm an. Die beiden Muskeln verlaufen nicht parallel, sondern schließen einen Winkel von 10° gegen die Winkelhalbierende ein. Jeder der beiden Muskeln entwickelt eine Kraft von jeweils 100 N; die Kräfte nennen wir $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$.

Wie groß ist die resultierende gemeinsame Kraft beider Muskeln (siehe **Abb. 1.2**)?

Zur Erinnerung:
sin(10°) ≈ 0,17
cos(10°) ≈ 0,98
sin(20°) ≈ 0,34
cos(20°) ≈ 0,94

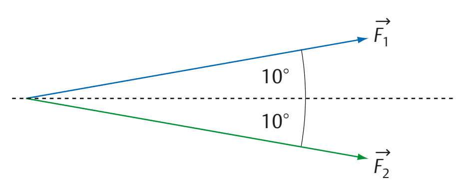


**Abb. 1.2 Skizze zum Rechenbeispiel.** [Quelle: Zabel, Kurzlehrbuch Physik, Thieme, 2016]

**Lösung:** Um die gemeinsame Kraft der beiden Muskeln zu ermitteln, müssen wir die beiden Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ addieren (siehe dazu **Abb. 2.1**). Dazu verschieben wir $\vec{F}_2$ so lange parallel, bis sein Ende auf die Spitze von $\vec{F}_1$ trifft. Dann verbinden wir das Ende von $\vec{F}_1$ mit der Spitze von $\vec{F}_2$ und erhalten so den roten Pfeil $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ als Summenvektor. Der Betrag dieses Summenvektors, geschrieben als $\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right|$, entspricht der Länge des roten Pfeils (siehe **Abb. 1.3**). Diese berechnet sich aus der Länge (sprich dem Betrag) von $\vec{F}_1$ mal dem Cosinus des Winkels zwischen $\vec{F}_1$ und dem Summenvektor, plus der Länge von $\vec{F}_2$ mal dem Cosinus zwischen $\vec{F}_2$ und dem Summenvektor. Damit wird der Betrag des Summenvektors (also die Länge des roten Pfeils):

$$\begin{aligned}\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right| &= \left|\vec{F}_1\right|\cos(10^\circ) + \left|\vec{F}_2\right|\cos(10^\circ)\\ &= \left(\left|\vec{F}_1\right| + \left|\vec{F}_2\right|\right)\cos(10^\circ) = 200\ \text{N} \cdot 0{,}98 = 196\ \text{N}\end{aligned}$$

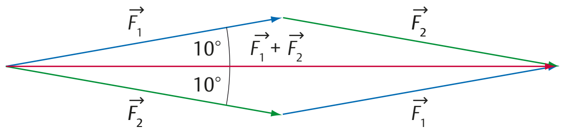


**Abb. 1.3 Lösung zum Rechenbeispiel.** [Quelle: Zabel, Kurzlehrbuch Physik, Thieme, 2016]

### 1.2.3 Dreisatzrechnung

Die Volumenstromstärke des Bluts in der Aorta beträgt während der Systole 200 ml/s. Die Aorta hat einen Durchmesser von 2 cm. Wie hoch wäre die Volumenstromstärke, wenn der Durchmesser der Aorta durch eine Stenose auf 1 cm (ebenfalls kreisrund) verengt wird, der Druck, mit dem das Herz pumpt, aber gleich hoch bleibt?

**Lösungsweg:** Dazu muss man an Fakten nur wissen, dass die Volumenstromstärke einer Flüssigkeit bei konstantem Druck proportional zur 4. Potenz des Radius des Rohres ist. Wir setzen hier die beiden Radien der Gefäße ins Verhältnis zueinander und ebenso die beiden Volumenstromstärken und erheben das Radiusverhältnis zur 4. Potenz:

Wir setzen also: normaler Radius der Aorta $a_1 = 1$ cm; Radius der Stenose $b_2 = 0{,}5$ cm, normale Volumenstromstärke $b_1 = 200$ ml/s, gesuchte Volumenstromstärke $= x$.

$$\frac{(a_1)^4}{(a_2)^4} = \frac{b_1}{x}$$

$$\frac{(a_2)^4}{(a_1)^4} \cdot b_1 = x = \frac{(0{,}5\ \text{cm})^4}{(1\ \text{cm})^4} \cdot 200\ \text{ml/s} = 12{,}5\ \text{ml/s}$$

# 2 Einheiten und Größen

## 2.1 Physikalische Einheiten und Größen

### 2.1.1 Basisgrößen und Basiseinheiten des Internationalen Einheitensystems

Die heute international geltenden Einheiten sind im Internationalen Einheitensystem (SI-System) zusammengefasst. In diesem System gibt es **Basiseinheiten** und **abgeleitete Einheiten**, die aus den Basiseinheiten hervorgehen. Die Basiseinheiten sind die Einheiten der Basisgrößen (**Tab. 2.1**). Für manche **abgeleiteten Größen** werden neue Bezeichnungen eingeführt. Zum Beispiel ist die Einheit der Kraft das Newton, abgekürzt N. Kraft ist aber eine abgeleitete Größe, denn sie kann aus den Basisgrößen Masse, Länge und Zeit zusammengesetzt werden: Kraft = Masse · Länge/Zeit² (S. 17), daraus folgt für die Einheit der Kraft: $[F] = \text{N} = \text{kg m/s}^2 = \text{kg m s}^{-2}$. (Die eckige Klammer $[F]$ bedeutet „Einheit von $F$".)

**Tab. 2.1** Basisgrößen und Basiseinheiten des Internationalen Einheitssystems.

| Basisgröße | Basiseinheit | Symbol für Basiseinheit | Formelzeichen für Basisgröße |
|---|---|---|---|
| Länge | Meter | m | $l$ |
| Masse | Kilogramm | kg | $m$ |
| Zeit | Sekunde | s | $t$ |
| Temperatur | Kelvin | K | $T$ |
| Strom | Ampere | A | $I$ |
| Stoffmenge | Mol | mol | $n$ |
| Lichtstärke | Candela | cd | $I_V$ |

**Lerntipp** !

Die Basisgrößen und Basiseinheiten solltest du kennen. Früher wurde im Physikum häufig danach gefragt. In neueren Zeiten wird eher verlangt, dass man Einheiten ineinander umrechnen kann. Hier (S. 95) findest du eine Tabelle, die alle Einheiten enthält, die du kennen musst, um im Physikum damit umgehen zu können.

### 2.1.2 Dezimale Vielfache und Teiler von Einheiten

Dezimale Vielfache und Teiler der Einheiten (z. B. kg, g oder mg) werden durch Vorsilben benannt oder durch **Multiplikation mit Zehnerpotenzen** angegeben.

### 2.1.3 Skalare und Vektoren

Es gibt **skalare** und **vektorielle** Größen:

- **Skalare** sind Größen, die nur einen bestimmten Betrag haben.
- **Vektoren** sind Größen, die außer ihrem Betrag noch zusätzlich eine Richtung oder einen Drehsinn im Raum haben. Sie werden durch einen Pfeil über der Größe gekennzeichnet (z. B. für Kraft: $\vec{F}$). Vektoren sind grafisch durch Pfeile darstellbar. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag an, die Richtung des Pfeils die Orientierung des Vektors im Raum.

**Tab. 2.2** Dezimale Vielfache und Teiler von Einheiten durch Vorsilben.

| Kleiner als 1 | Symbol | Zahlenwert | | Größer als 1 | Symbol | Zahlenwert | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dezi | d | 0,1 | $10^{-1}$ | Deka | da | 10 | $10^1$ |
| Zenti | c | 0,01 | $10^{-2}$ | Hekto | h | 100 | $10^2$ |
| Milli | m | 0,001 | $10^{-3}$ | Kilo | k | 1000 | $10^3$ |
| Mikro | µ | 0,000 001 | $10^{-6}$ | Mega | M | 1 000 000 | $10^6$ |
| Nano | n | 0,000 000 001 | $10^{-9}$ | Giga | G | 1 000 000 000 | $10^9$ |
| Piko | p | 0,000 000 000 001 | $10^{-12}$ | Tera | T | 1 000 000 000 000 | $10^{12}$ |
| Femto | f | 0,000 000 000 000 001 | $10^{-15}$ | Peta | P | 1 000 000 000 000 000 | $10^{15}$ |

Tab. 2.3 Beispiele für Skalare und Vektoren in der Physik

| Skalare (haben nur einen Betrag) | Vektoren (haben einen Betrag und eine Richtung) |
|---|---|
| Masse | Weg |
| Dichte | Geschwindigkeit |
| Volumen | Beschleunigung |
| Zeit | Kraft (auch Gewichtskraft) |
| Temperatur | Impuls |
| Leistung | Drehmoment |
| Arbeit, Energie | Feldstärke (magnetische und elektrische) |

**Addition und Subtraktion von Vektoren.** Um 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu einem Gesamtvektor zusammenzusetzen, verschiebt man einen der beiden Vektoren so lange parallel (ohne seine Richtung zu ändern!), bis sein Ende die Spitze des anderen Vektors berührt. Der **Summenvektor** wird dann vom Fußende des 1. Vektors zur Spitze des 2. Vektors aufgespannt. Vektoriell ergibt dies die Summe: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Anschaulich wird dies im sogenannten **Kräfteparallelogramm** dargestellt. Falls $\vec{a}$ minus $\vec{b}$ gebildet werden soll, dann wird zunächst der Gegenvektor von $\vec{b}$ gebildet (d. h. man dreht den Pfeil einfach um 180°) und addiert nach dem vorherigen Verfahren:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}$$

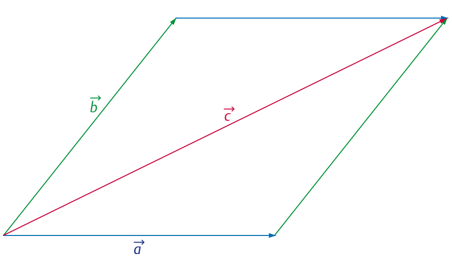


**Abb. 2.1 Kräfteparallelogramm.** Zum Addieren der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird Vektor $\vec{b}$ so lange parallel verschoben, bis sein Ende auf der Spitze von $\vec{a}$ steht. Der Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ist dann der rote Vektor, der vom Fußende des Vektors $\vec{a}$ zur Spitze des Vektors $\vec{b}$ zeigt. Man kann natürlich auch Vektor $\vec{a}$ so lange parallel verschieben, bis sein Fußende an der Spitze von Vektor $\vec{b}$ steht. Das Ergebnis ist dasselbe.

**Multiplikation von Vektoren mit Skalaren.** Eine häufige Rechenoperation in der Physik ist die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren. Ein bekanntes Beispiel ist die Kraft, die sich aus dem Produkt des Vektors Beschleunigung $\vec{a}$ mit dem Skalar Masse $m$ ergibt: $\vec{F}=m\,\vec{a}$. Dabei bleibt die Richtung des Vektors erhalten. Länge und Einheit können sich jedoch ändern. Beim angegebenen Beispiel $\vec{F}=m\,\vec{a}$ bedeutet dies, dass die Kraft $\vec{F}$ in die gleiche Richtung zeigt wie die Beschleunigung $\vec{a}$ (wie bei einem anfahrenden Auto), ihre Größe und Einheit aber durchaus anders lauten (als diejenige der Beschleunigung).

## 2.1.4 Flächen und Volumina

Flächen und Volumina spielen immer dann eine Rolle, wenn z. B. Querschnittsflächen von Knochen berechnet werden müssen oder die Anzahl von Zellen in einem bestimmten Gewebevolumen.

Tab. 2.4 Formeln zur Berechnung von Flächen und Volumina.

| Fläche | | Volumen | |
|---|---|---|---|
| Dreieck | $A=\frac{1}{2}(g\,h)$ | Pyramide (rechteckige Grundfläche) | $V=\frac{1}{3}(a\,b\,h)$ |
| Rechteck | $A=a\,b$ | Quader | $V=a\,b\,c$ |
| Kreis | $A=\pi\,r^2$ | Zylinder | $V=\pi\,r^2\,h$ |
| Kugeloberfläche | $A=4\,\pi\,r^2$ | Kugel | $V=\frac{4}{3}\pi\,r^3$ |

Die irrationale Zahl π = 3,14159, du brauchst dir aber nur zu merken: π = 3,14 oder ungefähr 3.

$a$, $b$, $c$ = Seiten- oder Kantenlängen, $h$ = Höhe, $r$ = Radius, $g$ = Länge der Grundlinie

## 2.1.5 Winkel

### Ebener Winkel

Der Winkel ist ein Maß dafür, um wie viel Grad 2 Geraden (Knochen, Muskeln, Sehstrahlen, Bauteile, Uhrzeiger usw.) gegen einander gedreht sind. Zum Begriff des Winkels gibt es 2 Zugänge:

**Erstens** den geläufigen Winkelbegriff des täglichen Lebens: Man beschreibt einen Vollkreis mit 360° und setzt einen beliebigen anderen Winkel mit den 360° ins Verhältnis. Ein Viertelkreis (ein rechter Winkel) sind dann 90° usw. 1° wird unterteilt in 60 Bogenminuten (′) und diese wiederum in 60 Bogensekunden (″). Ein so gehandhabtes Winkelmaß heißt **Gradmaß.**

**Zweitens** die wissenschaftlich technische Definition:
Wenn du bei dem Kuchenstück in der **Abb. 2.2** den Winkel $\alpha$ genau angeben möchtest, kannst du die Länge des Kreisbogens $s$ angeben („ich möchte 8 cm Kuchen haben"), dann ist diese Länge zweifellos ein Maß für den Winkel $\alpha$, aber leider kein eindeutiges. Denn $s$ hängt wesentlich noch vom Radius $r$ des Kuchenstücks ab ($s$ ist ja *proportional* zu $r$). Eindeutig wird die Winkelangabe erst dann, wenn wir $s$ durch $r$ teilen. Und deshalb lautet die wissenschaftliche Definition des Winkels folgendermaßen:

$$\alpha=\frac{\text{Länge des Kreisbogens } s}{\text{Radius } r \text{ des Kreises}}$$

oder

$$\text{Winkel } \alpha=\frac{s}{r}$$

umgeformt

$$s=\alpha\,r$$

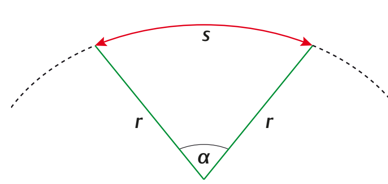


**Abb. 2.2 Zur Definition des Winkels im Bogenmaß.**

$s$ hat die Maßeinheit einer Länge, $r$ ebenso. Also hat der Winkel die Einheit $[\alpha]=\mathrm{m/m}=1$ und ist somit eine Zahl ohne Maßeinheit. Damit man einer solchen dimensionslosen Zahl ansieht, dass es sich um einen Winkel handelt, schreibt man die (unechte!) Maßeinheit **Radiant** (rad) dahinter. Ein so gehandhabtes Winkelmaß heißt **Bogenmaß.**

Zur Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt geht man von einem Vollkreis aus. Dieser hat den Umfang $s_{Vollkreis} = 2\pi r$ und den Radius $r$; für den Vollkreiswinkel gilt also:

$$\alpha_{Voll} = \frac{2\pi\ r}{r} = 2\pi\ \text{rad} = 6{,}28\ \text{rad}$$

und das ist gleich 360°, also 2π rad = 360°.

Der Zusammenhang zwischen Bogenmaß und Winkel gilt nicht nur für den Vollkreis, sondern für jeden beliebigen Winkelwert.

**Tab. 2.5** Die Winkelmaße rad und Grad.

| Grad | rad | |
|---|---|---|
| 360° | 2π | 6,283 rad |
| 180° | π | 3,1416 rad |
| 90° | π/2 | 1,57 rad |
| 57,3° | 1,0 | 1 rad |
| 1° | 0,0175 | 0,0175 rad (= 17,5 mrad) |

**Achtung:**

- Wenn du mit den Formeln umgehst, solltest du im Bogenmaß rechnen, also die Winkel in rad angeben (z. B. bei der Berechnung eines Kreisbogens).
- Ist der Winkel Teil einer **trigonometrischen Funktion** (S. 7), wird er meist in Grad angegeben (z. B. sin30° = 0,5).
- Bogenminute und Bogensekunde sind Gradmaße, keine Bogenmaße.

### Raumwinkel

Bei Raumwinkeln befinden wir uns im dreidimensionalen Raum. Stellen wir uns vor, wir befinden uns im Zentrum einer Kugel und schauen in Richtung Kugeloberfläche. Unser Sehfeld auf der Kugeloberfläche $A$ ist dann ein Kreis, der von einem Raumwinkel eingeschlossen wird. Man kann sich den Raumwinkel als Kegel vorstellen, der seine kreisrunde Grundfläche auf der Kugeloberfläche und seine Spitze im Zentrum der Kugel hat.

Die Einheit des **Raumwinkels** $\Omega = A/r^2$ ist (wie beim ebenen Winkel) dimensionslos ($m^2/m^2 = 1$). Zur Verdeutlichung wird aber **Steradiant** (sr) als Einheit gewählt.

Der Raumwinkel einer Kugel (voller Raumwinkel) beträgt 4π bzw. 12,56 sr. Ein Raumwinkel von 1 sr entspricht einem Kreiskegel mit einem Öffnungswinkel von 65,6°.

**Blick in die Klinik** **Raumwinkel**
Raumwinkel kommen in der Medizin bei der **Bestimmung des Gesichtsfeldes** vor. Das Gesichtsfeld beider Augen eines gesunden jungen Menschen überspannt horizontal ca. 180° und vertikal ca. 130°. Daraus ergibt sich ein Gesichtsfeld von ca. 5 sr.

**IMPP-Fakten**

**!!!** Sieh dir die dezimalen Vielfachen und Teiler der Einheiten an (z. B. kg, g oder mg). Sie werden durch Vorsilben benannt oder durch **Multiplikation mit Zehnerpotenzen** angegeben.
**!** Bei der Addition von Vektoren bildet man ein **(Kräfte-)Parallelogramm**: Die Vektoren werden so lange parallel verschoben, bis das Ende des 2. Vektors an der Spitze des 1. Vektors anliegt. Die Vektorsumme ist dann der Vektor, der vom Anfangspunkt des 1. Vektors zum Endpunkt des letzten Vektors reicht.

**!! Kreisfläche**:

$A = \pi\ r^2$

**!! Quadervolumen**:

$V = a\ b\ c$

**! Zylindervolumen**: $r$ = Radius

$V = \pi\ r^2\ h$

**Kugelvolumen**: $r$ = Radius

$V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$

**!!! Winkel α**: $s$ = Kreisbogen; $r$ = Radius; Einheit: m/m = rad

$\alpha = s/r$

## 2.2 Rechenbeispiele zu Einheiten und Größen

### 2.2.1 Flächen und Volumina

#### Rechenbeispiel 1

Für die Desinfektion einer Arbeitsfläche werden 4,2 ml eines Desinfektionsmittels zerstäubt. Wie viele Tröpfchen entstehen dabei, wenn man einen Durchmesser von 1 µm pro Tröpfchen annimmt?

**Lösung:** Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir an, dass ein Wassertropfen eine kugelförmige Gestalt hat. Für sehr kleine Tropfen stimmt dies sogar. Dann gehst du in drei Schritten vor. Zunächst berechnest du das Volumen eines Tropfens. Dann rechnest du die 4,2 ml in ein Volumen mit der Einheit $m^3$ um. Im dritten Schritt dividierst du das Gesamtvolumen des Desinfektionsmittels durch das Volumen eines Tröpfchens und dann hast du damit die Anzahl der Tröpfchen.

**1. Schritt:** Die Formel zum Berechnen des Kugelvolumens lautet

$$V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

wobei $r$ der Radius ist, d. h. der halbe Durchmesser. Setze also $0{,}5\ \mu m = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ m als Radius ein, dann erhältst du für das Volumen eines Tröpfchens:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(0{,}5 \cdot 10^{-6}\right)^3\ m^3 = 0{,}5236 \cdot 10^{-18}\ m^3 \approx 0{,}5 \cdot 10^{-18}\ m^3$$

**2. Schritt**: Aus der Volumenangabe 4,2 ml folgt

$$4{,}2 \cdot 10^{-3}\ l = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\ m^3 = 4{,}2 \cdot 10^{-6}\ m^3$$

denn 1 $m^3$ enthält 1000 Liter.

**3. Schritt**: Dividiere $4{,}2 \cdot 10^{-6}\ m^3$ durch das Volumen eines Tropfens:

$$\frac{4{,}2}{0{,}5} \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-18}} \cdot \frac{m^3}{m^3} = 8{,}4 \cdot 10^{18-6} = 8{,}4 \cdot 10^{12}$$

Das Ergebnis ist eine reine Zahl ohne Einheit. Bei der Zerstäubung entstehen $8{,}4 \cdot 10^{12}$ Tröpfchen.

#### Rechenbeispiel 2

Auf welchen Faktor erhöht sich der Lichtstrom bei unveränderter Beleuchtung durch eine Pupille, wenn sich der Pupillendurchmesser von 1,2 mm auf 4,8 mm erweitert?

**Lösung:** Entscheidend für den Lichtstrom ist die Fläche, durch die das Licht ins Auge eintritt. Die Fläche ist proportional zum

Quadrat des Radius ($A = \pi r^2$), der Radius (Pupillendurchmesser) steigt auf das 4-Fache, folglich die Fläche auf das 16-Fache. Damit steigt auch der Lichtstrom auf das 16-Fache.

### 2.2.2 Winkel

Bei einem normalsichtigen Menschen beträgt der Sehwinkel, bei dem zwei Punkte noch als getrennte Punkte wahrgenommen werden können, $2{,}4 \cdot 10^{-4}$ rad. Welchen Abstand müssen 2 Punkte auf einer Mauer voneinander haben, damit eine normalsichtige Person aus 10 m Entfernung diese noch als 2 getrennte Punkte wahrnehmen kann?

**Lösung:** Die Formel für den Sehwinkel lautet

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

Diese Formel musst du nach *s* auflösen, um die Entfernung zwischen den beiden Punkten zu bekommen. Stell dir dabei vor, der Betrachter steht auf dem Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius 10 m beträgt. Der (Seh-)Winkel *α* schneidet aus dem Kreis einen Kreisbogen *s* aus, der von den beiden Punkten begrenzt wird. Der Winkel *α* ist angegeben mit $2{,}4 \cdot 10^{-4}$ rad.

Also:

$$s = \alpha\, r = 2{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \text{ m} = 0{,}0024 \text{ m} = 2{,}4 \text{ mm}$$

Der Abstand zwischen den beiden Punkten muss mindestens 2,4 mm betragen, damit man sie aus 10 m Entfernung noch als 2 getrennte Punkte wahrnehmen kann.

# 3 Messfehler

## 3.1 Messfehler und Abweichungen

### 3.1.1 Messfehler

**Systematischer und zufälliger Fehler.** Es gibt systematische und zufällige Fehler. Systematische Fehler (fehlerhafte Messgeräte, unberücksichtigte Parameter etc.) müssen erkannt und beseitigt werden, zufällige Fehler können nur mit statistischen Methoden abgeschätzt werden.

**Absolute und relative Messfehler.** Der **Messfehler Δ*x*** ist unabhängig von der Größe *x*. Δ steht hier für Abweichung von dem tatsächlichen Wert der Größe *x*. Da der tatsächliche Wert nicht bekannt ist, nimmt man den Mittelwert als gute Näherung. Er wird in absoluten Zahlen angegeben und hat die gleiche Einheit wie die Größe *x*:

Länge ± 1 mm bedeutet: 1 m ± 1 mm, aber auch 2 m ± 1 mm, 3 m ± 1 mm ...

Bei **relativen Messfehlern** wächst $\Delta x$ mit *x*, sodass der Quotient $\Delta x/x$ konstant bleibt. Der relative Messfehler wird in Prozent angegeben und ist eine reine Zahl ohne Einheit.

Länge ± 0,1 % bedeutet:
1 m ± 1 mm, 2 m ± 2 mm, 3 m ± 3 mm ...

Der relative Messfehler wird nach folgender Formel berechnet:

$$\text{relativer Fehler der Messgröße } x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$$

Werden fehlerbehaftete Größen dividiert oder multipliziert, müssen die **relativen Fehler** der einzelnen Größen jeweils **addiert** werden, um den relativen Fehler der Gesamtgröße zu erhalten.

### 3.1.2 Mittelwert

**Gaußsche Normalverteilung (Glockenkurve).** Wird die Messung einer physikalischen Größe häufig wiederholt, dann werden die meisten Messwerte sich um einen **Mittelwert** scharen. Kleinere Abweichungen vom Mittelwert kommen häufig vor, größere Abweichungen selten. Üblicherweise werden alle Messwerte in einem Histogramm aufgetragen. Das Histogramm kann mit einer mathematischen Funktion, der sogenannten **Gaußschen Normalverteilung**, beschrieben werden.

Wichtigste Größen der Normalverteilung sind das **arithmetische Mittel** bzw. der Mittelwert $\bar{x}$ und die **Standardabweichung *s***.

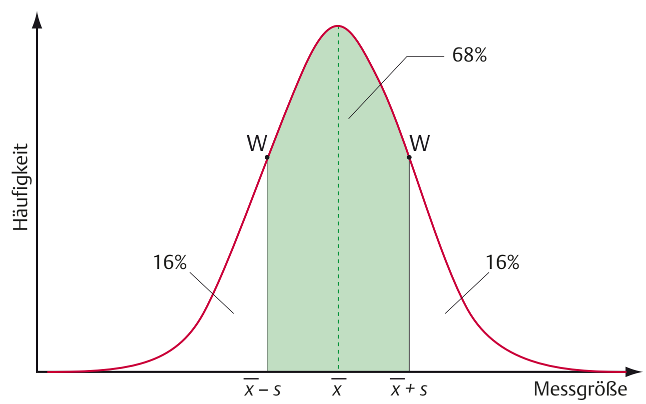


Abb. 3.1 **Gaußsche Normalverteilung.** $\bar{x}$ ist der arithmetische Mittelwert, $\bar{x} - s$ und $\bar{x} + s$ die Standardabweichung. 68 % aller Messwerte liegen innerhalb der ersten Standardabweichung. 32 % liegen außerhalb (16 % über und 16 % unter der Standardabweichung). Der Abstand von $\bar{x}$ zu den jeweiligen Wendepunkten *W* beträgt eine Standardabweichung *s*. [Quelle: Zabel, Kurzlehrbuch Physik, Thieme, 2016]

**Arithmetischer Mittelwert.** Den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ einer Messreihe berechnet man, indem man alle Werte aufaddiert und das Ergebnis durch die Anzahl der Messwerte teilt:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Anschaulich liegt der arithmetische Mittelwert beim Maximum der Normalverteilung. An der Kurve der Gaußschen Normalverteilung kann man auch erkennen, dass bei dieser Verteilung 50 % aller Werte **über** dem arithmetischen Mittel, 50 % aller Werte **unter** dem arithmetischen Mittel liegen. Median, arithmetischer Mittelwert und Modalwert nehmen den gleichen Wert an.

### 3.1.3 Standardabweichung

**Standardabweichung einer Messreihe.** Die Standardabweichung ist ein Maß für die Zuverlässigkeit der Einzelmessung und gibt deren **Messfehler** an. Im Fall einer Normalverteilung von Messwerten liegen 68 % aller Messwerte innerhalb eines Intervalls von ± *s*, wobei *s* als Standardabweichung bezeichnet wird. Wenn die Normalverteilung niedrig und breit ist, dann ist die Standardabweichung groß, bei einer hohen und schmalen Normalverteilung ist die Standardabweichung klein. Immer liegen jedoch ca. 68 % aller Messpunkte innerhalb dieser Standardabweichung, und 95,5 % aller Messwerte liegen innerhalb von 2 Standardabweichungen). Als Ergebnis einer Messung wird üblicherweise der Mittelwert mit seiner Standardabweichung angegeben: $\bar{x} \pm s$.

**Lerntipp** !

**Achtung**: 68 % aller Messwerte liegen innerhalb der ersten Standardabweichung. Daraus schließt man messerscharf, dass 32 % außerhalb liegen müssen. Das ist auch korrekt. Man muss dabei aber berücksichtigen, dass davon 16 % *über* und 16 % *unter* dem Bereich der Normalverteilung liegen! Manchmal wird im Physikum nach genau diesen 16 % gefragt. Außerdem ist es interessant zu wissen, dass der Abstand zwischen $\bar{x}$ und den jeweiligen Wendepunkten *W* genau eine Standardabweichung *s* beträgt.
In der Medizinischen Psychologie und Soziologie spielt die Standardabweichung ebenfalls eine große Rolle. Dort ist sie ein wichtiges Testgütekriterium und wird als SD (Standard Deviation) bezeichnet.

**Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts.** Auch der Mittelwert hat einen statistischen Fehler. Offensichtlich wird der Mittelwert umso vertrauenswürdiger, je größer die Zahl der Messungen *n* wird. Der mittlere Fehler des Mittelwertes (= Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts) ist wie folgt definiert:

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

**IMPP-Fakten**

**!!!!** Der **relative Messfehler** ist definiert als**:**

$$\text{relativer Fehler } (x) = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\ \%$$

**!** Werden fehlerbehaftete Größen dividiert oder multipliziert, müssen die **relativen Fehler** der einzelnen Größen jeweils **addiert** werden, um den relativen Fehler der Gesamtgröße zu erhalten.
**!!!!** Bei der Gaußschen Normalverteilung liegen **50 %** aller Werte **über** dem arithmetischen Mittel, **50 %** aller Werte **unter** dem arithmetischen Mittel (Median, arithmetischer Mittelwert und Modalwert sind gleich).
**!!!!** Ca. **68 %** aller Messpunkte einer Messreihe liegen innerhalb der **ersten Standardabweichung**.
**!!!!** Ca. **32 %** aller Messpunkte einer Messreihe liegen außerhalb der 1. Standardabweichung. 16 % davon oberhalb, 16 % davon unterhalb der ersten Standardabweichung.
**!!!!** **95,5 %** aller Messpunkte einer Messreihe liegen innerhalb der **zweiten Standardabweichung**.
**!!!** Den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ einer Messreihe berechnet man, indem man alle Werte aufaddiert und das Ergebnis durch die Anzahl der Messwerte teilt:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

**! Standardabweichung des Mittelwerts**: *n* = Anzahl der Messungen; *s* = Standardabweichung der Einzelmessungen der Messreihe

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

**!** Der Abstand zwischen $\bar{x}$ und den jeweiligen **Wendepunkten *W*** auf der Gaußschen Kurve entspricht genau einer Standardabweichung *s*.

## 3.2 Rechenbeispiele

### 3.2.1 Berechnen des absoluten Fehlers

Bei einem Patienten liefert die einmalige Messung des systolischen Blutdrucks mit einem automatischen Blutdruckmessgerät das Ergebnis von 120 mmHg. Der Hersteller gibt den relativen Messfehler des Geräts mit ± 1,5 % an.

Wie hoch ist der geschätzte absolute Fehler dieser Messung?

**Lösung:**

$$120\ \text{mmHg} \cdot \frac{1{,}5\ \%}{100\ \%} = 1{,}8\ \text{mmHg}$$

1,5 % von 120 mmHg sind also 1,8 mmHg. Also: der Messwert beträgt 120 mmHg ± 1,8 mmHg, der absolute Fehler beträgt 1,8 mmHg.

### 3.2.2 Berechnung des arithmetischen Mittelwerts

Eine Pflegekraft misst sechsmal die Herzfrequenz eines Patienten. Sie erhält folgende Werte: 84, 80, 92, 88, 87, 85.

Wie groß ist der arithmetische Mittelwert?

**Lösung:** Der arithmetische Mittelwert berechnet sich nach folgender Formel:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{84 + 80 + 92 + 88 + 87 + 85}{6} = 86$$

Die mittlere Herzfrequenz des Patienten beträgt 86 (Schläge pro Minute).

### 3.2.3 Standardabweichung des Mittelwerts

Die Ausmessung der Eustachischen Röhre bei 100 Probanden ergibt eine mittlere Länge von 3,6 cm mit einer Standardabweichung von *s* = 1 mm. Wie viele weitere Probanden müssten vermessen werden, um die Standardabweichung des Mittelwerts bei gleicher Standardabweichung des Messwerts *s* um einen Faktor 10 zu verkleinern?

**Lösung:** Die Standardabweichung des Mittelwerts folgt aus

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = 0{,}1$$

wobei *n* die Zahl der Probanden ist und *s* die Standardabweichung des Messwerts.

Die neue Standardabweichung des Mittelwerts soll um ein Zehnfaches kleiner sein: $\Delta\bar{x} = 0{,}001$ mm; dabei soll die Standardabweichung *s* bei *s* = 1 mm gleich bleiben.

$$0{,}01\ \text{mm} = \frac{1\ \text{mm}}{\sqrt{n}}$$

Auflösen nach *n*:

$$\sqrt{n} = \frac{1\ \text{mm}}{0{,}01\ \text{mm}} = 100 \quad \rightarrow \quad n = 10000$$

Das heißt, es müssen insgesamt 10 000 Probanden vermessen werden. Da bereits 100 Probanden getestet wurden, kommen noch 9900 dazu.

# Mechanik

## 4 Massenpunkt und starre Körper

### 4.1 Physik der Bewegung

### 4.1.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

**Geschwindigkeit.** Geschwindigkeit $v$ (für engl. velocity) ist die zurückgelegte Wegstrecke $s$ pro Zeitintervall $t$:

$$v = \frac{s}{t}$$

umgeformt

$$s = v\,t$$

und

$$t = \frac{s}{v}$$

Wichtige Geschwindigkeiten, die man auswendig wissen sollte, sind die Schallgeschwindigkeit und die Lichtgeschwindigkeit. Sie werden bei Prüfungen manchmal als bekannt vorausgesetzt.

**Schallgeschwindigkeit** in **Luft**: **330 m/s**, das entspricht ca. 1 km in 3 s.
**Schallgeschwindigkeit** in **Wasser** (wasserreichem Gewebe): ca. **1500 m/s**.

**Lichtgeschwindigkeit** im Vakuum (entspricht annähernd der Geschwindigkeit in Luft):
299 792 458 m/s ≈ $3 \cdot 10^8$ m/s oder ca. **300 000 km/s**.

**Beschleunigung.** Beschleunigung $a$ (für engl. acceleration) ist die Änderung der Geschwindigkeit $v$ pro Zeiteinheit $t$:

$$a = \frac{v}{t}$$

Die Beschleunigung ist somit ein Maß dafür, wie schnell sich eine Geschwindigkeit ändert. Die Einheit der Beschleunigung ist $[a] = \mathrm{m/s^2}$.

### 4.1.2 Arten der Bewegung

#### Translationsbewegung

Bei der Translationsbewegung können wir die folgenden Arten je nach Geschwindigkeit und Beschleunigung unterscheiden:

**Tab. 4.1** Arten der Translationsbewegung.

| Art der Translationsbewegung | Geschwindigkeit | Beschleunigung |
|---|---|---|
| gleichförmig | $v$ = konstant | $a = 0$ |
| gleichförmig beschleunigt | $v$ nimmt gleichförmig zu oder ab | $a$ = konstant |
| ungleichförmig beschleunigt | $v$ ändert sich ungleichförmig | $a$ ändert sich |

**Geradlinige gleichförmige Bewegung.** Bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung gilt: $s = v\,t$. Die Geschwindigkeit $v$ ist dabei konstant und ändert sich nicht mit der Zeit.

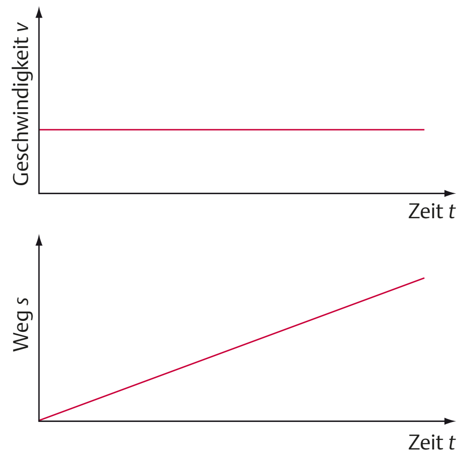


**Abb. 4.1 Verschiedene Darstellungen der gleichförmigen Bewegung.**
**Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm**: Die Geschwindigkeit bleibt über der Zeit konstant.
**Weg-Zeit-Diagramm**: Die zurückgelegte Wegstrecke nimmt linear mit der Zeit zu. [Quelle: Zabel, Kurzlehrbuch Physik, Thieme, 2016]

**Beschleunigte Bewegung (= Beschleunigung oder Abbremsung).** Immer, wenn auf einen freien Körper eine Kraft wirkt, tritt eine Änderung seiner Geschwindigkeit (= Beschleunigung oder Abbremsung) auf. Ein Sonderfall ist die gleichförmige Beschleunigung, wenn auf einen Körper eine konstante Kraft einwirkt und er nicht durch andere Kräfte beeinflusst wird. Die Geschwindigkeit nimmt dann linear mit der Zeit zu:

$$\Delta v = a\,t$$

umgeformt

$$a = \frac{\Delta v}{t}$$

d. h. Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit. Das Symbol Δ drückt die Änderung aus.

Die zurückgelegte Wegstrecke nimmt quadratisch mit der Zeit zu, es gilt:

$$s = \frac{1}{2} a\,t^2$$

und

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

Beim **freien Fall** wirkt z. B. die Erdanziehungskraft als konstante Kraft, was in einer gleichmäßigen Beschleunigung des Körpers resultiert („**Erdbeschleunigung**" von **9,81 m/s²**). Beim freien Fall wird für den Weg $s$ die Fallhöhe $h$ und für die Beschleunigung $a$ die Erdbeschleunigung $g$ in die Formel eingesetzt:

$$h = \frac{1}{2} g\,t^2$$