

MERKE

Der Auftrieb eines Körpers ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (**Archimedisches Prinzip**). Die Auftriebskraft ist nach oben gerichtet und verringert das Gewicht eines Körpers in einer Flüssigkeit. Ein Körper schwimmt, wenn sein Auftrieb größer ist als sein Gewicht, er sinkt, wenn der Auftrieb kleiner ist als sein Gewicht und er schwebt, wenn der Auftrieb gleich seinem Gewicht ist.

3

Klinischer Bezug

Druck spielt in der Medizin eine sehr große Rolle. Der Augeninnendruck ist ein hydrostatischer Druck und wird durch zu und abfließende Flüssigkeiten geregelt und konstant gehalten. Luftdruck in der Lunge variiert von leichtem Unterdruck beim Einatmen von ca. -500 Pa bis zum expiratorischen leichten Überdruck von 150 Pa. Im Blutkreislauf wird durch die Herz Tätigkeit ein Druckunterschied von ca. 13 kPa zwischen der arteriellen und venösen Seite aufgebaut. Allerdings muss bei allen biologischen Systemen berücksichtigt werden, dass die Wände nicht starr sind, sondern dehnbar. Der elastisch dehnbare Schlauch ist daher ein besseres Modell für die Blutgefäße als ein starres Rohr und die elastische Kugel bzw. ein Luftballon ist ein Modell für die Lungenaktion. Bei dehnbaren Gefäßen hängt der Innendruck umgekehrt proportional vom Radius ab. Je größer der Radius um so kleiner der Druck.

**Check-up**

- ✓ Was steht hinter dem hydraulischen Prinzip? Wie und wo findet es technische Anwendung?
- ✓ Machen Sie sich nochmals klar, wie man den hydrostatischen Druck einer Flüssigkeit oder eines Gases berechnet und rechnen Sie die verschiedenen Einheiten für den Druck (Pa, bar, mmHg) ineinander um.
- ✓ Wie kann man mit dem Archimedisches Prinzip das Volumen und die Dichte eines Festkörpers mit bekannter Masse bestimmen?

3.5 Kräfte an Grenzflächen**Lerncoach**

In diesem Kapitel lernen Sie, welche Kräfte die Atome und Moleküle in Flüssigkeiten und Festkörpern zusammenhalten und welche Unterschiede zwischen den Kräften im Inneren und an Oberflächen herrschen. Es empfiehlt sich die Definitionen von Druck, Spannung und potentieller Energie aus den vorigen Kapiteln noch einmal zu rekapitulieren, um die Grundlagen zu haben, die in diesem Abschnitt benötigt werden.

3.5.1 Überblick

Was hat die Haftung von Farben auf Oberflächen mit Seifenblasen zu tun und mit der Ausdehnung der Alveolen in der Lunge beim Atmen? Allen Phänomenen gemeinsam sind Grenzflächen und Oberflächen, die hier ins Spiel kommen. Wir werden in diesem Abschnitt die Kräfte und Spannungen kennenlernen, die an Grenzflächen zwischen zwei Substanzen herrschen und daraus eine Reihe von physikalischen Eigenschaften ableiten, die Bezug zur Physiologie und Klinik haben.

3.5.2 Kohäsion und Adhäsion

Die Kräfte auf Moleküle an Oberflächen und Grenzflächen von Flüssigkeiten und Festkörpern sind verschieden von denen im Inneren. Man unterscheidet zwischen Kohäsions- und Adhäsionskraft. Unter **Kohäsionskraft** versteht man die Anziehung zwischen einem herausgegriffenen Molekül und seinen Nachbarn in der selben Substanz. Unter **Adhäsionskraft** versteht man die Wechselwirkung von Molekülen an der Grenzfläche zu einer anderen Substanz. In **Abb. 3.18** ist die helle Kugel (Atom) einer anziehenden Kohäsionskraft von seinen Nachbarn ausgesetzt. Die Atome an der Grenzfläche zu der roten Substanz wechselwirken nicht nur mit den Nachbarn in der gleichen Substanz, sondern auch mit den Atomen in der roten Substanz. Daher sind diese Atome noch zusätzlich Adhäsionskräften ausgesetzt.

MERKE

Kohäsion ist die Kraft auf ein Molekül innerhalb des gleichen Stoffes, Adhäsion ist die Kraft auf ein Molekül an der Grenzfläche zu einem anderen Stoff.

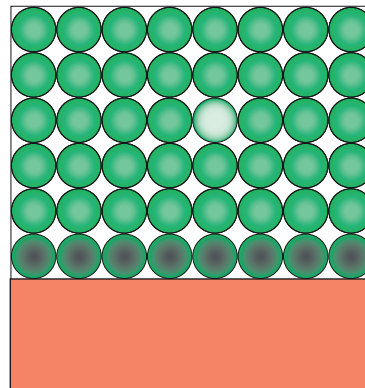


Abb. 3.18 Kohäsion und Adhäsion. Das hell gekennzeichnete Atom innerhalb des grünen Atomverbands ist Kohäsionskräften durch die Nachbaratome ausgesetzt, die grau-grün gekennzeichneten Atome an der Grenzfläche zur roten Substanz sind auch Adhäsionskräften ausgesetzt.

3.5.3 Oberflächenspannung

Im Inneren einer Substanz ist die Kohäsionskraft größer als an der Oberfläche. Da sie gleichmäßig nach allen Seiten wirkt, gibt es keine Vorzugsrichtung und keine resultierende Kraft auf ein Atom im Inneren. An der Oberfläche ist die resultierende Kraft nach innen größer und die Atome an der Oberfläche werden nach innen gezogen (Abb. 3.19a). Um eine Oberfläche zu bilden oder um eine Oberfläche zu vergrößern (also um Moleküle aus dem Inneren an die Oberfläche zu bringen), muss die nach innen gerichtete Kohäsionskraft F_{Koh} überwunden werden. Zieht man z.B. mit einem Bügel der Breite b einen Flüssigkeitsfilm um die Strecke Δl aus einer Oberfläche (Abb. 3.19b), muss dafür die Arbeit $F_{\text{Koh}} \Delta l$ geleistet werden, d.h. die potenzielle Energie der Flüssigkeit wird vergrößert wie beim Anheben eines Gegenstandes. Setzt man die geleistete Arbeit in Beziehung zur neu geschaffenen Oberfläche ΔA , erhält man die in der Oberfläche enthaltene spezifische Oberflächenenergie

$$\gamma = \frac{W}{\Delta A} = \frac{F_{\text{Koh}} \Delta l}{2b \Delta l} = \frac{F_{\text{Koh}}}{2b}.$$

Der Faktor 2 berücksichtigt, dass gleichzeitig zwei Oberflächen gebildet werden. Die spezifische Oberflächenenergie hat die Einheit J/m^2 . Sie ist identisch mit N/m . Damit kann die spezifische Oberflächenenergie auch als die Kraft pro Längeneinheit interpretiert werden, die benötigt wird, um eine Oberfläche zu vergrößern. Diese Kraft wirkt tangential zur Oberfläche und versucht diese zu verkleinern. Die Oberflächenenergie wird auch **Oberflächenspannung** genannt. Die Oberflächenspannung ist eine wichtige Materialkonstante von allen festen und flüssigen Materialien. Durch Tenside kann die Oberflächenspannung von Wasser reduziert werden, sodass „Seifenblasen“ entstehen.

MERKE

Die Oberflächenspannung darf nicht mit der mechanischen Spannung σ verwechselt werden. Bei der mechanischen Spannung σ wirkt eine Kraft auf eine Oberfläche, daher ist die Einheit N/m^2 . Bei der Oberflächenspannung greift die Kraft entlang einer Linie an, daher ist die Einheit N/m .

Binnendruck

Mit der Bügelmethode kann die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten recht einfach bestimmt werden. Wenn mit einem Bügel ein Wasserfilm aus einem Trog gezogen wird, dann ist die aufzuwendende Kraft: $F_{\text{Koh}} = 2\gamma b$. Dabei ist b die Breite des Bügels und der Faktor 2 berücksichtigt, dass gleichzeitig zwei Oberflächen gebildet werden (s.o.). Wir sehen hier auch, dass die Kraft konstant ist und nicht von der Höhe des bereits herausgezogenen Flüssigkeitsfilms abhängt. Dies ist verschieden von der Federkraft, die linear mit der Dehnung der Feder zunimmt. Dividiert man die Kohäsionskraft durch die zweifache Bügelbreite, dann erhält man die Oberflächenspannung γ . In Tab. 3.3 sind einige Werte von Oberflächenspannungen angegeben. Mit den gleichen Überlegungen können wir auch den Binnendruck in einer Seifenblase bestimmen. Wir denken uns eine Seifenblase mit Radius r am Äquator durchgeschnitten. Um die Blase in ihrem Umfang aufrecht zu erhalten, stehen zwei Kräfte im Gleichgewicht: einerseits die Kohäsionskraft, die die Oberfläche verkleinert, in diesem Fall bei einem Kreisumfang der Seifenblase $2\pi r$: $F_{\text{Koh}} = 2\gamma 2\pi r$; andererseits die Kraft durch den Binnendruck p_i der Luft in der Blase, die auf die Äquatorfläche πr^2 wirkt: $F_{\text{Luft}} = p_i \pi r^2$. Im Gleichgewicht ist $F_{\text{Koh}} = F_{\text{Luft}}$ und damit folgt für den Binnendruck:

$$p_i = \frac{4\gamma}{r},$$

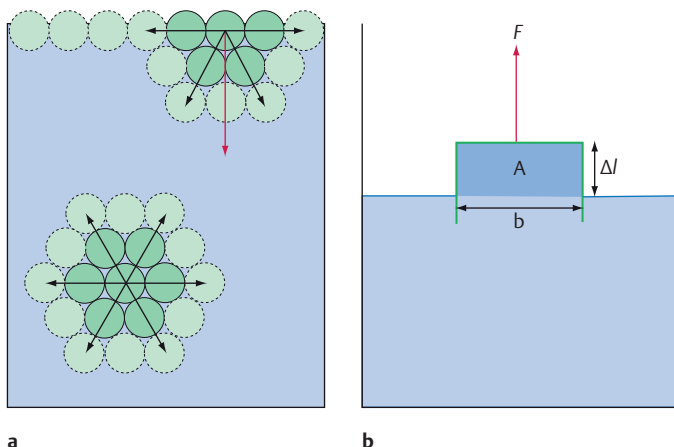


Abb. 3.19 Oberflächenspannung.

a Resultierende Kraft zeigt ins Innere der Flüssigkeit, im Inneren hat die Kohäsionskraft keine ausgezeichnete Richtung. **b** Zieht man mit einem Bügel der Breite b einen Flüssigkeitsfilm um die Strecke Δl aus einer Oberfläche, muss dafür die Arbeit $W = F \Delta l$ geleistet werden.

Tabelle 3.3

Werte für Oberflächenspannungen	
Substanz	γ (N/m)
Hg	0,48
H ₂ O	0,072
Seifenlösung	0,031
Äthylen	0,023

d.h. der Binnendruck steigt umgekehrt proportional zum Radius r an: in kleinen Blasen herrscht ein höherer Druck als in größeren Blasen. Das hat eine wichtige Konsequenz. Bringt man zwei Blasen miteinander in Kontakt, sodass sie den Druck ausgleichen können, dann wird das Gas dem Druckgefälle folgen und vom höheren zum niedrigeren Druck strömen. Die größere Blase bläht sich weiter auf Kosten der kleineren auf und die kleinere Blase wird letztendlich verschwinden.

Die gleichen Überlegungen gelten für einen Wassertropfen, allerdings muss man berücksichtigen, dass dieser nur eine Oberfläche hat, sodass der Binnendruck durch:

$$p_i = \frac{2\gamma}{r}$$

gegeben ist.

Bei einem Radius von 1 mm erreicht der Binnendruck einen Wert von ca. 140 Pa. Bei der **Tropf-pipette** nutzt man die Oberflächenspannung aus, um eine feste Tropfengröße mit Masse m zu erzielen. Die Oberflächenspannung hält den Tropfen an der Pipette, bis das Gewicht des Tropfens mg größer als die Haltekraft durch die Oberflächenspannung $2\pi r\gamma$ wird: $mg > 2\pi r\gamma$. Durch den Radius der Tropf-

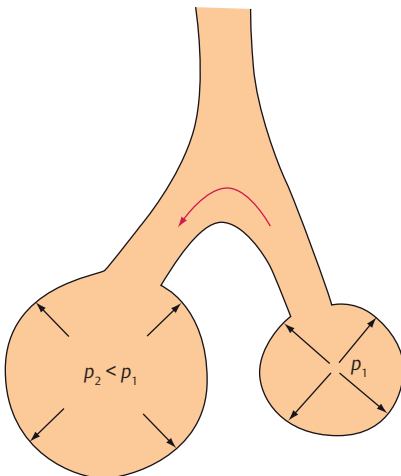


Abb. 3.20 Alveolarer Druckausgleich in der Lunge.

pipette kann die verabreichte Stoffmenge relativ präzise eingestellt werden.

Klinischer Bezug

Die Lunge des Menschen hat etwa 3×10^8 Alveolen. Die Oberflächenspannung bzw. die Wandspannung γ_{Wand} versucht den Radius der Alveolen zu verkleinern und die Lunge zusammenzuziehen. Beim Einatmen muss der Innendruck der Luft gleich dem Druck sein, der durch die Wandspannung erzeugt wird:

$$p_{\text{Luft}} = p_{\text{Alveole}} = \frac{4\gamma_{\text{Wand}}}{r}$$

Alveolen mit kleinem Radius drücken die Luft in Alveolen mit größerem Radius. Die kleineren Alveolen würden vollständig kollabieren, wenn nicht Surfactants die Oberflächenspannung reduzierten (Abb. 3.20). Ist die Bildung dieser Surfactants gestört, kollabieren ganze Lungengebiete (Atelektase). Surfactants haben zusätzlich die Aufgabe, die Oberflächenspannung drastisch zu reduzieren, damit überhaupt Atmung möglich ist, wie wir in dem folgenden Beispiel sehen werden.

Wir wollen den alveolären Druck abschätzen und nehmen als Oberflächenspannung den Wert für Wasser: $\gamma = 0,072$ N/m. Der mittlere Radius der Alveolen ist ca. $24 \mu\text{m}$. Damit folgt ein Druck von ca. $2 \times 0,072 \text{ Nm}^{-1} / 24 \times 10^{-6} \text{ m} = 6$ kPa. Hier haben wir einen Faktor 2 anstatt von 4 eingesetzt, da die Alveolen nur eine Innen- aber keine Außenseite haben. Tatsächlich ist der transmurale Druckunterschied aber nur 0,5 kPa. Diese Erniedrigung wird durch Surfactants an der Gefäßwand der Alveole vermindert. 6 kPa könnten wir beim Einatmen nicht aufbringen. Störung der Surfactants erhöht den transmuralen Druck und führt zur Atemnot. Bei Frühgeborenen fehlt das Surfactant oder es wird zu wenig gebildet, sodass die Alveolen sich aufgrund einer zu hohen Oberflächenspannung nicht entfalten können und es so zum **Atemnotsyndrom** kommen kann.

Kontaktwinkel

Aus dem Kontaktwinkel zwischen einer flachen Oberfläche und einem Flüssigkeitstropfen kann das relative Verhältnis von Adhäsion zu Kohäsion abgelesen werden (Abb. 3.21). Bei guter Benetzung ist der Kontaktwinkel $\theta < 90^\circ$, im Idealfall ist bei perfekter Benetzung $\theta = 0^\circ$. Dies tritt nur dann auf, wenn die Adhäsion wesentlich größer ist als die Kohäsion. Bei schlechter Benetzung ist der Kontaktwinkel $\theta > 90^\circ$. In diesem Fall ist die Adhäsion schwächer als die Kohäsion. Die Flüssigkeit neigt zur Tröpfchenbildung.

3.5.4 Kapillarität

Die Benetzungseigenschaften von Flüssigkeiten auf Oberflächen wirken sich auch auf die **Kapillarität** aus. Wird eine Glaskapillare in eine Flüssigkeit eingetaucht, dann sieht man am Meniskus, ob die Flüssigkeit in die Kapillare hineingezogen wird (kapillare Erhöhung bei benetzenden Flüssigkeiten,

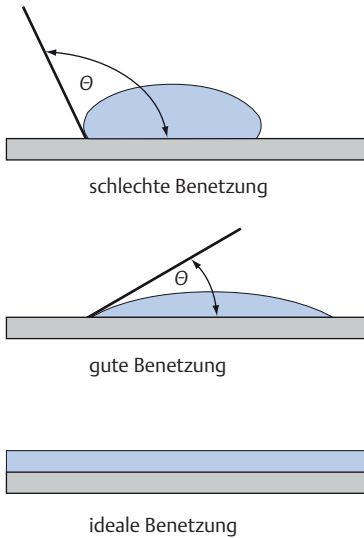


Abb. 3.21 Kontaktwinkel. Der Kontaktwinkel θ zwischen Flüssigkeitstropfen und einer Oberfläche definiert die Benetzungseigenschaft.

Kontaktwinkel $\theta < 90^\circ$) oder ob die Flüssigkeit aus der Kapillare verdrängt wird (kapillare Depression bei nicht benetzenden Flüssigkeiten, Kontaktwinkel $\theta > 90^\circ$) (Abb. 3.22). Im Fall von kapillarer Erhöhung beobachtet man durch die Kapillarität eine Steighöhe h gegen die Gravitationswirkung, die proportional zur Oberflächenspannung γ und umgekehrt proportional zum Radius r der Kapillare ist:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}.$$

ρ ist die Dichte der Flüssigkeit und g ist die Erdbeschleunigung.

Klinischer Bezug

Die kapillare Erhöhung beim Wassertransport in Pflanzen wird benötigt, damit die Wassersäule in den Leitungsbahnen nicht abreißt. Der Transport selbst wird durch den Wurzeldruck und den Transpirationssog angetrieben.

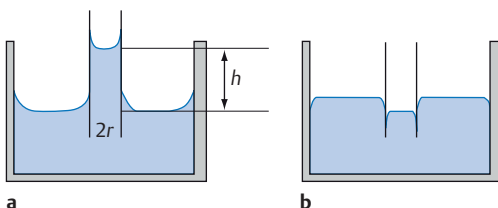


Abb. 3.22 Kapillarität. a) Kapillare Erhöhung bei benetzenden Flüssigkeiten. Die Steighöhe ist proportional zur Oberflächenspannung und umgekehrt proportional zum Radius der Kapillare. b) Kapillare Depression bei nicht benetzenden Flüssigkeiten.

MERKE

Kommunizierende Röhren (S. 56) und Kapillarität sind gegenläufige Erscheinungen. Kommunizierende Röhren betonen die Gleichheit von Glasröhren unabhängig von ihrer Gestalt, Kapillarität erzeugt Unterschiede. Kommunizierende Röhren beruhen auf Druckausgleich, Kapillarität auf Adhäsion von Flüssigkeit an der Gefäßoberfläche. In kommunizierenden Röhren ohne Kapillarität ist die Wassersäule überall gleich hoch, in kommunizierenden Röhren mit kapillarer Erhöhung ist die Flüssigkeitssäule um so höher, je kleiner der Radius der Röhre ist.



Check-up

- ✓ Was ist der Unterschied zwischen Kohäsion und Adhäsion?
- ✓ Machen Sie sich nochmals klar was geschieht, wenn zwei unterschiedlich große Luftblasen miteinander in Kontakt kommen.
- ✓ Wie hängen Kontaktwinkel und Kapillarität miteinander zusammen?
- ✓ Fassen Sie mit eigenen Worten nochmals zusammen, worin der Unterschied zwischen kommunizierenden Röhren und Kapillarität liegt.

3.6 Strömung von Flüssigkeiten



Lerncoach

Die Strömungslehre und ihre Gesetze, die Sie im folgenden Kapitel kennen lernen, sind für einen Mediziner ein sehr wichtiges Teilgebiet der Physik. Das Blutkreislaufsystem und auch die Atmung funktionieren nach diesen Regeln. Auch künstliche Kreisläufe wie die Dialyse oder die Kreisläufe der Herz-Lungen-Maschine gehorchen ihnen. Deshalb ist es wichtig, diese Regeln und ihre Konsequenzen zu kennen. Manches davon wird Ihnen auch im Kapitel Elektrizitätslehre, wenn es um den elektrischen Strom und seine Eigenschaften geht, wieder begegnen.

3.6.1 Überblick

In den vorausgehenden Abschnitten haben wir die Statik von Gasen und Flüssigkeiten betrachtet, in diesem Abschnitt geht es um die Kinematik, d.h. um die Strömung oder das Fließen. Zunächst einmal machen wir die Annahme von einer idealen Strömung, d.h. einer Strömung ohne Reibungsverluste. Unter diesen Bedingungen gilt die Energieerhaltung. Wir kommen recht weit im Verständnis von fließenden Flüssigkeiten und lernen den Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit

keit, Querschnittsfläche und Druck kennen. Tatsächlich sind reale Flüssigkeiten nicht reibungsfrei. Die Kinematik der Strömung unterliegt Reibungsverlusten, und die Volumenstromstärke ist sowohl durch einen Strömungswiderstand wie durch einen Druckabfall gekennzeichnet. Beide zusammen ergeben das Ohm'sche Gesetz für die Stromstärke: Druckabfall dividiert durch Widerstand ergibt Stromstärke. Alle diese Gesetze gelten für eine laminare Strömung. Falls die laminare Strömung in eine turbulente übergeht, dann entsteht Chaos, das möglicherweise destruktive Folgen haben kann.

3.6.2 Laminare und turbulente Strömung

Zur Diskussion der Strömung von Flüssigkeiten betrachten wir zunächst ideale Flüssigkeiten. Ideale Flüssigkeiten sind inkompressibel und fließen ohne innere Reibungsverluste, d.h. ohne Viskosität. Die Strömung von idealen Flüssigkeiten wird durch eine konstante Anzahl von Flusslinien dargestellt (Abb. 3.23a). Die Dichte der Flusslinien ist proportional zur Strömungsgeschwindigkeit v der Flüssigkeit.

Man spricht von **laminarer Strömung**, wenn die Flusslinien trotz Hindernis oder Verengung nicht abreißen (Abb. 3.23b). Im Gegensatz dazu spricht man von **turbulenter Strömung**, wenn die Stromlinien um ein Hindernis diskontinuierlich verlaufen, d.h. abreißen, Wirbel bilden und sich neu bilden (Abb. 3.23c).

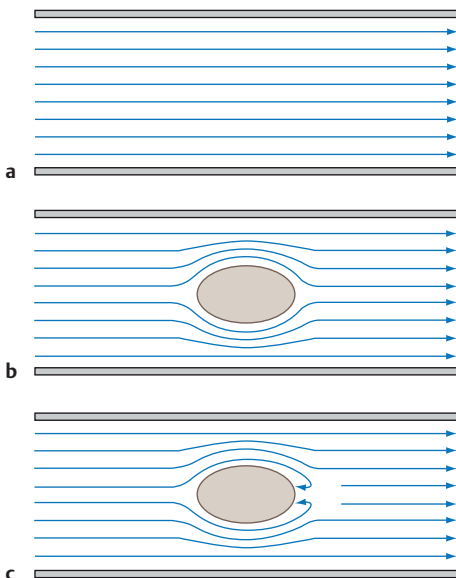


Abb. 3.23 Strömungsverhältnisse in einer idealen Flüssigkeit. a Laminare Strömung. b Laminare Strömung um ein Hindernis. c Turbulente Strömung um ein Hindernis. Die Flusslinien reißen ab und bilden Wirbel.

Volumenstromstärke

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit in einem Rohr mit Querschnittsfläche A pro Zeiteinheit Δt ein Volumenelement $\Delta V = A \Delta l$ durchströmt. Dabei ist Δl die von der Flüssigkeit zurückgelegte Wegstrecke im Rohr. Der Volumenstrom oder die Volumenstromstärke folgt dann aus:

$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \Delta l}{\Delta t} = Av.$$

Der Punkt über dem Volumen deutet die Volumenänderung pro Zeiteinheit an. Die Volumenstromstärke ergibt sich aus Querschnittsfläche mal Strömungsgeschwindigkeit. Sie hat die Einheit $[V] = \text{m}^3/\text{s}$ oder l/s .

Kontinuitätsgleichung

Bei laminarer Strömung bleibt die Zahl der Flusslinien konstant, auch bei Veränderung der Querschnittsfläche des Rohrs. Bei kleinerer Querschnittsfläche verdichten sich die Flusslinien, d.h. die Strömungsgeschwindigkeit nimmt zu (s.o.) und umgekehrt. Dabei fließt das gleiche Flüssigkeitsvolumen durch die engere bzw. weitere Stelle. Aus der Gleichheit der Volumina folgt die Gleichheit der Volumenstromstärken:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2.$$

Aus der konstanten Volumenstromstärke folgt, dass die Geschwindigkeiten sich umgekehrt proportional zu den Querschnittsflächen verhalten: $A_1 v_1 = A_2 v_2$, d.h. je kleiner die Querschnittsfläche, umso größer die Strömungsgeschwindigkeit. Dieser Zusammenhang wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

MERKE

Je kleiner die Querschnittsfläche, desto größer die Strömungsgeschwindigkeit, damit die Volumenstromstärke konstant bleibt.



In der Physiologie wird für die Volumenstromstärke \dot{V} häufig die Bezeichnung \dot{Q} oder nur Q verwendet.

Rechenaufgabe

Aufgabe 3.13: An einer konzentrischen Stenose in einem unverzweigten Abschnitt eines Blutgefäßes mit kreisrundem Querschnitt wird eine (über den Querschnitt gemittelte) doppelt so große Blutströmungsgeschwindigkeit wie vor und nach der Stenose gemessen (bei laminarer Strömung).

Wie groß ist der Innendurchmesser an der Stenose relativ zum Innendurchmesser vor oder nach der Stenose? (Lösung S. 225)

3.6.3 Dynamik von Flüssigkeiten

Bisher wurde angenommen, dass die Flüssigkeit fließt, ohne nach der Ursache für das Fließen zu fragen. Dies entspricht der Kinematik von Massenpunkten in der Mechanik. Die Ursache von Bewegung sind Kräfte und Drehmomente, die Ursache von Volumenstromstärken sind Drücke und Druckunterschiede. Strömung verläuft immer entlang eines Druckgradienten von hohem Druck zu niedrigerem Druck.

MERKE

Bei Strömung von Flüssigkeiten ist die Druckdifferenz entscheidend, nicht die Differenz der Kräfte!

Bernoulli-Gleichung

Bei statischen Flüssigkeiten ist der Druck in allen Richtungen gleich groß. Dies entspricht dem hydrostatischen Druck. Hier nennen wir den statischen Druck **Staudruck**. Sobald die Flüssigkeit anfängt zu fließen, nimmt der Staudruck auf die Wand ab und gleichzeitig nimmt der **Strömungsdruck** der fließenden Flüssigkeit zu. Der Gesamtdruck bleibt konstant (Gesetz nach **Bernoulli**):

$$p_{\text{Gesamt}} = p_{\text{Stau}} + p_{\text{Strömung}} = p_{\text{Stau}} + 1/2 \rho v^2 = \text{konstant}$$

Je größer der Strömungsdruck wird, umso kleiner ist der Staudruck, und umgekehrt. Dies ist der Inhalt der Bernoulli Gleichung. Die Bernoulli-Gleichung basiert auf der Energieerhaltung, wobei der Staudruck der potenziellen Energie entspricht und der Strömungsdruck der kinetischen Energie (vgl. S. 42). Im Rahmen der klassischen Mechanik haben wir gelernt, dass die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie eine Konstante ist:

$$E_{\text{Gesamt}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = m g h + \frac{1}{2} m v^2.$$

Für die Masse schreiben wir jetzt $m = \rho V$ und dividieren durch das Volumen V , sodass wir für die Energiedichte erhalten:

$$\frac{E_{\text{Gesamt}}}{V} = \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{\text{Gesamt}}.$$

Die Energiedichte entspricht also dem Gesamtdruck des Systems.

Nimmt bei einer Verengung die Geschwindigkeit zu, dann fällt der Staudruck ab. Durch Strömung entsteht somit eine Sogwirkung, die z.B. im Bunsenbrenner und in der Wasserstrahlpumpe ausgenutzt wird. Auch der Kehlkopf zur Stimmbildung arbeitet nach dem Bernoulli-Prinzip.

MERKE

Bei Verengung nimmt die Strömungsgeschwindigkeit zu und der Staudruck nimmt ab.

Klinischer Bezug

Kehlkopffunktion. Die Stimmbänder im Kehlkopf nähern sich zunächst durch die Kehlkopfmuskulatur. Die Expirationsluft muss dann durch den Spalt der verengten Glottis strömen. Nach den Gesetzen von Bernoulli

$$p_{\text{Stau}} + 1/2 \rho v^2 = \text{konst.}$$

sinkt der Druck und die Stimmbänder schließen sich vollständig. Nach dem Schließen sinkt der Strömungswiderstand auf 0. Erst bei einem Expirationsdruck von 400 – 500 Pa wird die Glottis wieder geöffnet. Der unterbrochene Luftstrom ergibt den Klang der Stimme. Die Stimmhöhe wird durch die Länge und Spannung der Stimmbänder bestimmt.

Blutdruck. Bei Blutdruckmessungen wird der Staudruck in den Blutgefäßen bestimmt. Ist dieser zu hoch, dann kann der Blutdruck durch eine höhere Strömungsgeschwindigkeit erniedrigt werden. Dazu muss die Volumenflussrate \dot{V} erhöht oder der Strömungswiderstand R_S erniedrigt werden. Die Volumenflussrate kann durch Vergrößerung des Herzzeitvolumens erreicht werden, was z.B. durch Kräftigung der Herzmuskulatur bei Ausdauersport erzielt wird.

3.6.4 Reale Flüssigkeiten

Im Gegensatz zu idealen Flüssigkeiten erleiden reale Flüssigkeiten bei der Strömung einen Druckabfall durch **innere Reibung** bzw. durch **Viskosität**. Die innere Reibung kann man sich als Rauigkeit zwischen den über einander weggleitenden Stromfäden verdeutlichen. Reibung erzeugt immer Verlust an kinetischer Energie. Die Energieerhaltung, wie sie im Bernoulli-Gesetz zum Ausdruck kommt, ist durch Reibung nicht mehr vollständig, ein Teil wird in Wärmeenergie umgewandelt und kann für die mechanische Strömungsenergie nicht mehr zurück gewonnen werden. Der Druckabfall in einer realen Flüssigkeit ist näherungsweise linear über die Länge des Strömungsrohrs verteilt. Weiterhin weicht in realen Flüssigkeiten das Strömungsprofil stark von dem der idealen Flüssigkeit ab. Die reale Flüssigkeit haftet an den Wänden und fließt am schnellsten im Zentrum. Bei kreisförmigem Rohrquerschnitt ist die Geschwindigkeit am Rand näherungsweise Null und im Zentrum am größten. Das Geschwindigkeitsprofil hat damit einen parabolischen Verlauf mit dem Maximum im Zentrum (**Abb. 3.24**). Flüssigkeiten, die ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil beim Fließen in zylindrischen Röhren aufweisen, nennt man **Newton'sche Flüssigkeiten**.

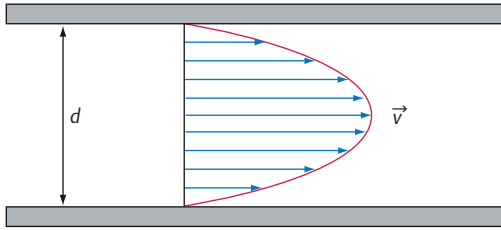


Abb. 3.24 Laminare Strömung bei realen Flüssigkeiten. Bei einem kreisförmigen Rohrquerschnitt zeigt das Strömungsprofil einen parabolischen Verlauf. Die Strömungsgeschwindigkeit ist im Zentrum maximal.

Ohm'sches Gesetz für reale Flüssigkeiten

Für viskose Flüssigkeiten gilt das Ohm'sche Gesetz, analog zur elektrischen Stromleitung (vgl. S. 106). Die Volumenstromstärke ist durch den Quotienten aus Druckdifferenz Δp zwischen Eingang und Ausgang und Strömungswiderstand R_S gegeben:

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{R_S}.$$

Zwischen Volumenstromstärke und Druckdifferenz besteht eine lineare Beziehung, die Proportionalitätskonstante ist der inverse Strömungswiderstand $1/R_S$. Der inverse Strömungswiderstand $1/R_S$ wird auch **Leitwert** oder **Conductance** genannt.

Strömungswiderstand – Gesetz von Hagen-Poiseuille

Auf der einen Seite wird die Flüssigkeitsströmung durch die Druckdifferenz angetrieben. Auf der anderen Seite wird die Flüssigkeit durch die innere Reibung und Haftung an den Wänden an der Strömung gehindert. Aus beiden Effekten zusammen kann man den **Strömungswiderstand** berechnen (Abb. 3.25). Der Strömungswiderstand hat einen Vorfaktor (8π), der von der gewählten Geometrie abhängt (in diesem Fall ein zylindrisches Rohr), einen geometrischen Anteil (Länge l und Querschnittsfläche A) und einen material-spezifischen Anteil (Viskosität η):

$$R_S = 8\pi\eta \frac{\Delta l}{A^2} = \frac{8}{\pi} \eta \frac{\Delta l}{r^4}.$$

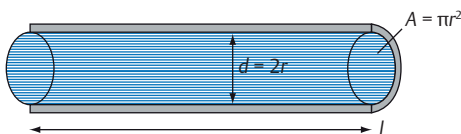


Abb. 3.25 Strömungswiderstand. Bei einem kreisförmigen Rohrquerschnitt ist der Strömungswiderstand proportional zur Länge des Rohrs und umgekehrt proportional zum Quadrat der Querschnittsfläche.

Bei der Umrechnung wurde für den Querschnitt eine Kreisfläche $A = \pi r^2$ angenommen. Der Strömungswiderstand R_S ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Querschnittsfläche A bzw. umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Rohrradius r . Damit ist die Volumenstromstärke \dot{V} proportional zur vierten Potenz des Radius r^4 . Bei halbem Radius sinkt die Volumenstromstärke um das 16-fache! Dies hat wichtige Konsequenzen bei der Durchblutung. Bei Verengung der Blutgefäße nimmt die Volumenstromstärke dramatisch ab. Die Einheit des Strömungswiderstands folgt aus der Definition: $R_S = \Delta p / \dot{V}$. Damit ist $[R_S] = \text{Pa} \cdot \text{s} / \text{m}^3$.

MERKE

Die Volumenstromstärke ist proportional zur vierten Potenz des Radius: Sinkt der Durchmesser eines Rohres um die Hälfte, fließt pro Zeiteinheit nur noch 1/16 der Flüssigkeit hindurch!

Rechenaufgabe

Aufgabe 3.14: Einem Herzinfarktpatienten wird in das betroffene Herzkranzgefäß ein Stent eingeführt. Dadurch wird dessen Durchmesser um 25% erweitert. Durch den Stent strömt das Blut weiterhin laminar und mit derselben Temperatur und Viskosität. Auch die Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende des Stents ist dieselbe wie vorher. Wievielmals höher als die ursprüngliche Volumenstromstärke ist die neue Volumenstromstärke? (Lösung S. 225)

Viskosität

Die Viskosität η hat die Einheit $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$. Die Viskosität von Wasser ist temperaturabhängig und sinkt von $18 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ bei 0°C auf $0,8 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ bei der Körpertemperatur von 37°C ab. Bei der gleichen Temperatur hat Blut eine Viskosität von $4 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, ist also fünf mal viskoser als Wasser. Blut ist eine sehr komplexe Flüssigkeit, bei der die Viskosität vom Hämatokritwert, von der Strömungsgeschwindigkeit und von der Scherrate abhängt. Unter Scherung richten sich die Erythrozyten parallel aus. Dabei sinkt die Viskosität und der Strömungswiderstand, sodass Blut besser durch enge Kapillare fließen kann. Blut ist keine Newton'sche Flüssigkeit.

Praktikum

Viskositätsbestimmung

Die Viskosität einer Flüssigkeit soll aus der Volumenstromstärke bestimmt werden. Dazu wird ein einfaches Kapillarviskosimeter verwendet (Abb. 3.26). Es besteht aus einem offenen Reservoir der Flüssigkeit (a), welches den notwendigen Druck aufbaut, auch Mariotte'sche Flasche genannt, Verbindungsrohren (b), der eigentlichen Kapillare (c), aufgesetzten und offenen Staurohren (d), sowie einem Auffanggefäß(e), womit das Volumen der auslaufenden Flüssigkeit gemessen werden kann. Der Druckabfall über der Kapillare wird über den Höhenunterschied der Flüssigkeit in den Staurohren bestimmt: $\Delta p = \rho g \Delta h$. Aus der Gleichung für die Volumenstromstärke folgt für die Viskosität durch Umformen:

$$\eta = \frac{\pi \rho g r^4 t \Delta h}{8 l V}$$

Die Dichte der Flüssigkeit sollte bekannt sein, Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, Radius r und Länge l der Kapillare muss genau bestimmt werden. Die Messgrößen sind dann der Druckabfall bestimmt über den Höhenunterschied Δh in den Staurohren sowie das Volumen der ausströmenden Flüssigkeit V in der Zeit t . Der relative Fehler bei der Bestimmung der Viskosität folgt aus den relativen Fehlern aller Messgrößen, wobei Fehler bei der Bestimmung des Radius besonders stark eingehen (Faktor 4 beim ersten Term):

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \sqrt{4 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$

Strömungswiderstand bei Gasen

Die Strömung von Gasen durch Röhren kann genauso behandelt werden wie die Strömung von Flüssigkeiten. Allerdings muss man beachten, dass die Viskosität von Gasen wesentlich geringer ist als die von Flüssigkeiten, von Luft ist sie 60-

mal geringer als von Wasser. Bei Atmung spielt der Strömungswiderstand durch die Trachea und die Bronchien eine große Rolle. Der globale Strömungswiderstand der Lunge kann aus der Volumenflussrate leicht abgeschätzt werden. Der alveolare Druckunterschied ist ca. 200 Pa. Dabei wird ca. 0,5 l Luft in 1 Sekunde eingesaugt. Daraus ergibt sich ein Strömungswiderstand von: $R_S = \Delta p / \dot{V} = 200 \text{ Pa} / 0,5 \text{ l/s} = 400 \text{ Pa} \cdot \text{s/l}$. Dieser Strömungswiderstand ist verhältnismäßig gering und entsteht vor allem in der Trachea.

Reihenschaltung von Strömungswiderständen

(Abb. 3.27)

In einer idealen Flüssigkeit fällt an einer Verengung der Staudruck wegen der höheren Geschwindigkeit ab und nimmt nach der Verengung wieder auf den alten Wert zu. Bei einer realen Flüssigkeit ist der Druckabfall kontinuierlich und hängt von der Länge und dem Querschnitt jedes Abschnitts ab. Der Druckabfall ist besonders drastisch im Bereich der Verengung und ist weniger steil vor und nach der Verengung. Der Druckabfall in dieser Reihenschaltung von Strömungswiderständen entspricht dem Spannungsabfall bei der Reihenschaltung von elektrischen Widerständen (vgl. S. 109).

Kirchhoff'sche Gesetze

Die Kirchhoff'schen Gesetze verknüpfen Strom und Spannung in elektrischen Netzwerken (S. 108). Diese Gesetze können in gleicher Weise auch auf die Strömung von Gasen und Flüssigkeiten angewandt werden. Man unterscheidet zwei prinzipiell unterschiedliche Verknüpfungen von Strompfaden, zum einen das sukzessive Hintereinanderschalten von Strömen (2. Kirchhoff'sches Gesetz), und zum anderen die Verzweigung von Strömen (1. Kirchhoff'sches Gesetz). Verknüpft man die Kirchhoff'schen Gesetze mit dem Ohm'schen Gesetz über die Volumenstromstärke, dann kann man daraus den Ge-

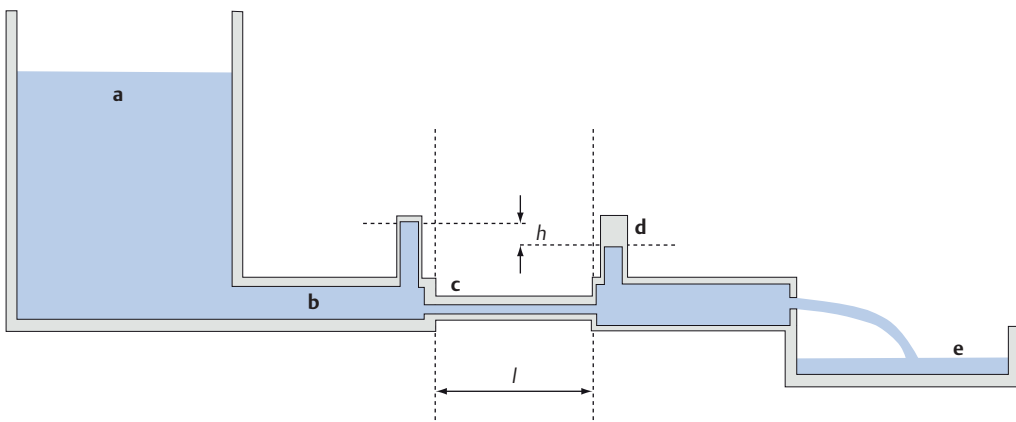


Abb. 3.26 Kapillarviskosimeter zur Bestimmung von Viskosität von Flüssigkeiten.

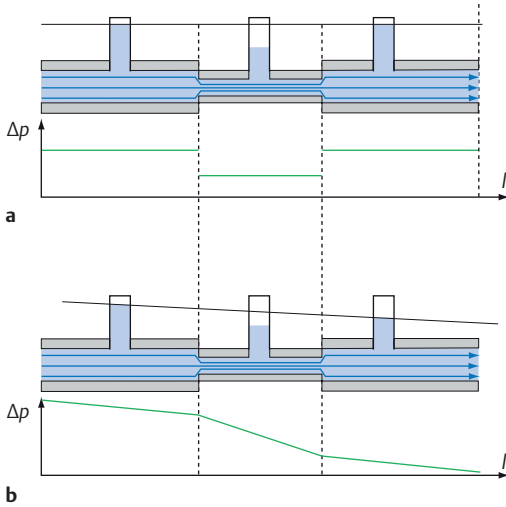


Abb. 3.27 Druckabfall bei Reihenschaltung von Strömungswiderständen. Die aufgesetzten Staurohre messen den jeweils herrschenden Staudruck bei Strömung durch Rohre mit verschiedenem Durchmesser. **a** Bei idealen Flüssigkeiten ist der Staudruck vor und nach einer Verengung gleich und bei der Verengung verringert. **b** In einer realen Flüssigkeit sinkt der Staudruck kontinuierlich über der Gesamtlänge des Rohrs ab. Bei Verengung ist der Abfall des Drucks besonders stark.

samtwiderstand bei Reihen- bzw. Parallelschaltung von verschiedenen Strömungswiderständen berechnen. (Anmerkung: in manchen Physiologiebüchern ist die Bezeichnung für das 1. und 2. Kirchhoff'sche Gesetz vertauscht, was sich aber nicht auf die Berechnung des Gesamtwiderstands auswirkt.)

Reihenschaltung

Bei Reihenschaltung von verschiedenen Strömungswiderständen werden die Druckabfälle bei konstanter Volumenstromstärke addiert (**2. Kirchhoff'sches Gesetz**) (Abb. 3.28a):

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3.$$

Kombiniert man dies mit dem Ohm'schen Gesetz für den Strömungswiderstand:

$$\Delta p = \dot{V} R_S,$$

dann folgt daraus:

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 = \dot{V} \cdot (R_{S1} + R_{S2} + R_{S3}).$$

Aus der letzten Gleichung ersehen wir, dass der gesamte Strömungswiderstand einer Reihenschaltung von Widerständen sich aus der Summe der Einzelwiderstände ergibt:

$$R_S^{\text{Reihe}} = R_{S1} + R_{S2} + R_{S3} \dots = \sum_i R_{Si}.$$

Jedes weitere angehängte Leitungsstück vergrößert den Gesamtwiderstand.

Parallelschaltung

Bei Parallelschaltung sind an jedem Verzweigungsknoten die Summe der Ströme konstant (**1. Kirchhoff'sches Gesetz**) (Abb. 3.28b):

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3.$$

Dieses Gesetz ist sehr leicht einzusehen: sofern es keine Verluste gibt, muss die in eine Verzweigung einströmende Flüssigkeit gleich der Summe der ausströmenden Flüssigkeiten sein. Das 1. Kirchhoff'sche Gesetz drückt damit die Massenerhaltung der Flüssigkeit aus. Bei Anwendung des Ohm'schen Gesetzes folgt, dass der Druckabfall über allen Verzweigungen gleich groß sein muss:

$$\dot{V}_1 = \frac{\Delta p}{R_{S2}} + \frac{\Delta p}{R_{S3}} = \Delta p \left(\frac{1}{R_{S2}} + \frac{1}{R_{S3}} \right) = \frac{\Delta p}{R_S^{\text{Parallel}}}.$$

Daraus folgt, dass bei paralleler Schaltung von Widerständen die Leitwerte (S. 68) der einzelnen Zweige sich zu einem Gesamtleitwert addieren:

$$\frac{1}{R_S^{\text{Parallel}}} = \frac{1}{R_{S1}} + \frac{1}{R_{S2}} + \frac{1}{R_{S3}} \dots = \sum_i \frac{1}{R_{Si}}.$$

Mit zunehmender Zahl von parallel geschalteten Widerständen nimmt der Leitwert zu, der Gesamtwiderstand nimmt also ab.

Für Reihenschaltung wie für Parallelschaltung folgt die Volumenstromstärke aus dem gesamten Druckabfall dividiert durch den Gesamtwiderstand:

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{R_S}.$$

Wir kommen abschließend zu der wichtigen Erkenntnis, dass bei zunehmender Zahl von Reihewiderständen der Gesamtwiderstand größer wird,

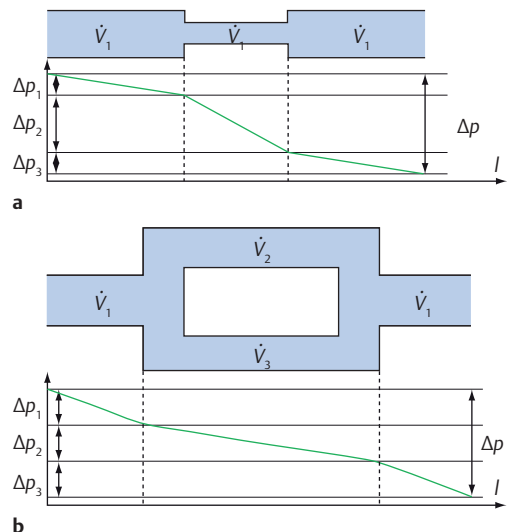


Abb. 3.28 Kirchhoff-Gesetze. Berechnung des Strömungswiderstand bei Reihenschaltung (a), und Parallelschaltung (b).

während bei zunehmender Zahl von Parallelwiderständen der Leitwert $1/R_S$ größer wird, also der Gesamtwiderstand sinkt.

MERKE

Je mehr Widerstände hintereinander geschaltet werden, desto höher wird der Gesamtwiderstand.

Je mehr Widerstände parallel geschaltet werden, desto niedriger wird der Gesamtwiderstand.

Klinischer Bezug

Der **Strömungswiderstand in den Bronchien** ist geringer als in der Trachea wegen der Parallelschaltung der Luftwege. Weniger als 20% des gesamten Strömungswiderstandes kommt durch Kapillaren mit einem Durchmesser < 2 mm zustande. Der Strömungswiderstand in den Bronchien ist nur $R_{\text{Bron}} = 20 \text{ Pa s/l}$ (im Gegensatz zu Gesamtströmungswiderstand der Lungen von ca. 400 Pa s/l). Da der Strömungswiderstand gering und die Strömung laminar ist, spricht man von der „ruhigen Zone“ der Lunge. Auch im Blutkreislauf wird der hohe Strömungswiderstand in den Kapillaren durch Parallelschaltung überwunden.

Ähnlich der Atmung kann auch der **Blutkreislauf** nach den Gesetzen der Fluidodynamik beschrieben werden. Während bei der Atmung die Arbeitssubstanz (Luft) mit der Umgebung ausgetauscht wird, zirkuliert beim Blutkreislauf die Arbeitssubstanz Blut in einem geschlossenen und verzweigten Röhrensystem. Wir betrachten hier einen stark vereinfachten Fall und nehmen an, dass der Kreislauf durch eine geschlossene Röhre repräsentiert werden kann, die beidseitig an eine Pumpe angeschlossen ist (**Abb. 3.29**). Falls das Herz als Pumpe ruht, besteht vollständiger Druckausgleich, beide Seiten des Röhrensystems zeigen mit den Staurohren den gleichen neutralen Druck an. Wenn die Pumpe (Herz) eingeschaltet wird, dann wird ein Druckunterschied aufgebaut. Auf der arteriellen Ejektionsseite ist der Druck hoch, auf der venösen Rücklaufseite ist der Druck niedrig. Bei normaler Herz Tätigkeit besteht ein Druckunterschied von 120 hPa (ca. 100 mmHg) zwischen der arteriellen und venösen Seite. Die Pumpleistung des Herzens hält den Druckunterschied zwischen Arterien und Venen aufrecht. Die **Volumenflussrate**, die durch das Herz erzeugt wird, auch **Herzzeitvolumen** (HZV) genannt, ist definiert als Druckdifferenz durch Strömungswiderstand:

$$\dot{V} = \text{HZV} = \frac{\Delta p}{R_S}$$

Das Herzzeitvolumen ist definiert als Schlagvolumen ΔV mal Herzfrequenz f_{Hz} : $\text{HZV} = \Delta V \cdot f_{\text{Hz}}$. Dabei ist das **Schlagvolumen** die gesamte geförderte Blutmenge pro Herzschlag. Das HZV kann damit leicht abgeschätzt werden: $\text{HZV} = 80 \text{ ml} \times 100 \text{ min}^{-1} = 8000 \text{ ml/min}$. Bei bekannter Druckdifferenz von 120 hPa folgt daraus der Strömungswiderstand: $R_S = \Delta p / \text{HZV} = 120 \text{ hPa} \cdot \text{min} / 8 \text{ l} = 90 \text{ kPa s/l}$. Dies ist ein sehr großer Strömungswiderstand, wesentlich größer als der Strömungswiderstand

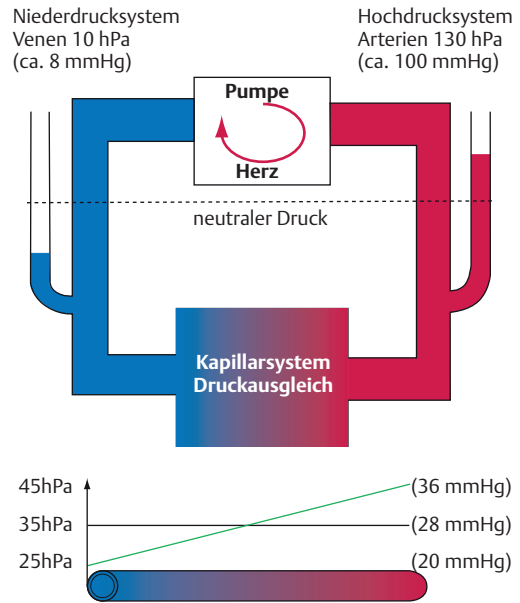


Abb. 3.29 Blutkreislauf als einfaches Röhrensystem mit einer Pumpe, die den Druckunterschied aufbaut. Im Kapillarsystem findet der Druckausgleich statt.

der Lunge, der vorwiegend durch die peripheren Kapillaren zustande kommt. Trotz hochgradiger Parallelschaltung haben die Kapillaren den größten Strömungswiderstand im Kreislauf. Hier fällt daher vorwiegend der Druckunterschied zwischen arterieller und venöser Seite ab, d.h. hier findet der Druckausgleich statt. Die angegebenen Werte für den Druckunterschied gelten streng genommen nur beim Liegen. Sobald wir aufstehen ist der Kreislauf vertikal angeordnet und wir müssen den Schweredruck noch zusätzlich berücksichtigen. Der Druckunterschied zwischen arterieller und venöser Seite bleibt bei 120 hPa (ca. 100 mmHg), der absolute Druck fällt jedoch vom Fuß bis zum Kopf hin stetig auf beiden Seiten ab.

Rechenaufgabe

Aufgabe 3.15: Bei einem Patienten mit einem akuten Herzinfarkt wird zur Entlastung des verengten Blutgefäßes ein Bypass gelegt. Der Bypass ist gleich lang wie das kranke Gefäß und hat einen doppelt so großen Durchmesser.

Wievievielmal größer als die ursprüngliche Volumentromstärke ist dann die Stromstärke in beiden Gefäßen gemeinsam, wenn die Druckdifferenz gleich bleibt?

(Lösung S. 225)

Turbulenz

Die Turbulenz ist durch die Unterbrechung der laminaren Strömung gekennzeichnet. Die turbulente Strömung ist gefährlich, weil sie **chaotisch** ist und nicht determinierbar. Turbulente Strömung kann

zerstörerisch sein. Im Fall von Turbulenz gilt nicht mehr das Ohm'sche Gesetz, d.h. die Linearität von Volumenstromstärke und Druckdifferenz ist nicht mehr gegeben. Turbulenz entsteht bei:

- großer Dichte ρ
- großer Geschwindigkeit v
- großem Innendurchmesser d
- geringer Viskosität η

Als Kriterium für turbulente Strömung wird die dimensionslose Reynold'sche Zahl Re verwendet:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}$$

Falls Re unter 1000 liegt, ist die Gefahr für turbulente Strömung gering. Erreicht sie dagegen Werte über 2000, muss mit turbulenter Strömung gerechnet werden. Strömungen von Gasen sind wegen ihrer geringen Dichte schneller turbulent als Flüssigkeitsströme. Beim Aufsteigen von Rauch kann man turbulente Strömung häufig beobachten. Zwei Organe im Körper sind von turbulenter Strömung besonders betroffen: die Aorta und die Trachea. In der Aorta wird die turbulente Strömung des Bluts durch einen Windkessel unterdrückt. In der Trachea führt die turbulente Strömung zu einem erhöhten Strömungswiderstand bei der Atmung.

Klinischer Bezug

Windkesselfunktion. Wegen der hohen systolischen Ejektionsgeschwindigkeit (1m/s) und des großen Durchmessers der Aorta von 2 cm erreicht die Reynold-Zahl Werte von 5000. Um die Turbulenz zu unterdrücken, ist in die Aorta ein Windkessel eingebaut. Ein Teil der kinetischen Energie des systolisch ausgeworfenen Blutes wird kurzzeitig in potenzielle Energie umgewandelt, indem die Aorta gedehnt und das Blut dort gespeichert wird. Während der Diastole wird die potenzielle Energie wieder in kinetische Energie zurückverwandelt, welche das gespeicherte Blut weiter in die Peripherie treibt. Der Windkessel ist ein Energiespeicher, der Turbulenzen unterdrückt. Falls dies nicht mehr funktioniert, kommt es zum erhöhten systolischen Blutdruck.

Vorsicht bei der Verabreichung von Spritzen: Hierbei muss man darauf achten, dass trotz geringer Kolbengeschwindigkeit sehr hohe Strömungsgeschwindigkeiten an der Spitze von Spritzen auftreten können. Zu hohe Geschwindigkeiten erzeugen Turbulenzen in der Ader und können zu Verletzungen führen!



Check-up

- ✓ Was versteht man unter laminarer Strömung?
- ✓ Was besagt das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz? Machen Sie sich nochmals klar, was dies für die Strömungsgeschwindigkeit von Blut bei einer Kapillarverengung bedeutet.
- ✓ Welche Erhaltungsgröße kommt in der Bernoulli – Gleichung zum Ausdruck?
- ✓ Wiederholen Sie die Kirchhoff'schen Gesetze.
- ✓ Warum ist die Gefahr der Turbulenz in Aorta und Trachea besonders hoch?